CONCOURS 1986 **OPTIONS M ET P'**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures

N.B. — *Les parties I, II, III, V peuvent être traitées indépendamment.*

I

On considère la série entière réelle $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2}$ de somme $f(x)$. Trouver le rayon de convergence de cette série. On étudiera avec soin les cas où $x = 1$ et $x = -1$.

II

Montrer que l'équation différentielle (E)

$$3x(1-x)y' + 2(1-x)y = 1$$

admet une solution développable en série entière définie sur $[-1, 1[$.

III

a. Calculer la primitive G de la fonction $t \in]-\infty, 1[\longmapsto \frac{t}{1-t^3}$ nulle pour $t = 0$.

b. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $]-\infty, 1[$.
On distinguera les cas où $x > 0$ et $x < 0$.

c. Montrer que (E) a une solution unique continue sur $[-1, 1[$ développable en série entière. En déduire l'expression de $f(x)$, somme de la série entière $\sum_{0}^{\infty} \frac{x^n}{3n+2}$, au moyen des fonctions usuelles. Préciser la valeur de $f(-1)$.

IV

On désigne par S la somme de la série $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ et par S_n la somme des termes jusqu'à l'indice n. $S_n = \sum_{K=0}^{K=n} \frac{(-1)^K}{3K+2}$

a. Déterminer n pour que $|S - S_n| < \frac{1}{10}$. Calculer une valeur approchée S' de S à moins de $\frac{1}{10}$ près.

b. Ln désigne le logarithme népérien, en utilisant les valeurs approchées à moins de 10^{-5} près des nombres suivants, avec quelle approximation peut-on obtenir S ?

$$3{,}14159 \leqslant \pi \leqslant 3{,}14160$$
$$1{,}73205 \leqslant \sqrt{3} \leqslant 1{,}73206$$
$$0{,}69314 \leqslant \text{Ln } 2 \leqslant 0{,}69315$$

V

On admettra que les deux séries $\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ sont convergentes et ont pour somme respectivement Ln 2 et $\frac{\pi^2}{6}$.

a. En déduire que la série $\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente et que sa somme est égale à $-\frac{\pi^2}{12}$.

b. De la relation $\frac{1}{3n+2} = \frac{1}{3n} - \frac{2}{9n^2} + \frac{4}{9} \frac{1}{n^2(3n+2)}$ déduire en fonction de $S = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$, la somme de la série $\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^K}{K^2(3K+2)}$.

c. Calculer $T_{10} = \sum_{K=1}^{K=10} \frac{(-1)^K}{K^2(3K+2)}$ et un majorant de $\sum_{11}^{+\infty} \frac{(-1)^K}{K^2(3K+2)}$.

d. En déduire une valeur approchée de S à 10^{-4} près.